$$V(b) = \sum_i [\rho_i(b)]^0 = V_0 + Ab^{\mu}$$

となるような正の値V_0が存在するかどうかを調べた。まだV_0の値は確定していないが$V_0 \neq 0$の可能性のあることがわかった。

一方，波動関数の局在性は stretched exp. 的になり先の場の性質と対応していることが示された（図２）。以上のように，場の統計的性質と波動関数の統計的性質とが対応し，絶対連続とカントール的な部分とが共存する可能性のある事が示唆された。

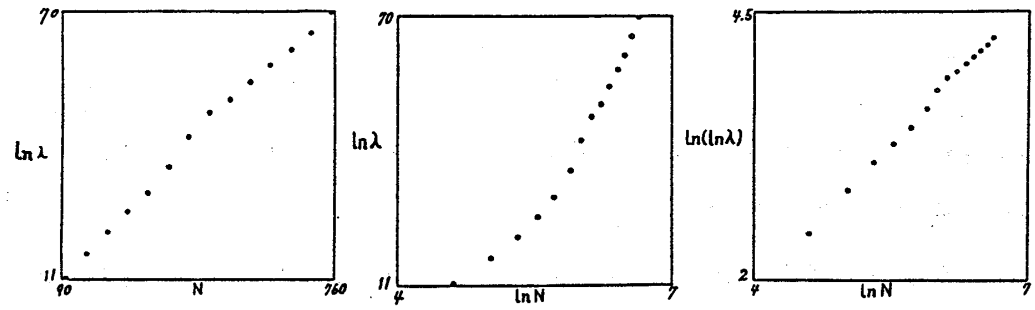

図2. 波動関数の局在性。λは伝達行列の固有値を示す。$\lambda \sim e^{\varepsilon N^{\lambda}}$となることがわかる。
（$B = 1.7$,　$\varepsilon = 10^{-8}$,　$N = 20000$）

Chaos における量子古典対応の回復とその問題点

京大・理　足立　聡，戸田幹人
京大・基研　池田研介

この研究は，「量子系に加えられた "Unitary な Noise"（～他の自由度からの擾乱）は非可積分系の量子古典対応を回復する。」という主張をする。

まず，非可積分系の量子古典対応の回復を議論する前提となるその破れについて説明したい。計算がなされる Model は Standard Map である：

$$H = \frac{1}{2}p^2 + K\cos\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$$

この Hamiltonian を古典/量子力学で扱うと古典/量子 Standard Map（CSM/QSM）が導かれる：

$$\mathrm{CSM}: \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1} \\ p_{n+1} = p_n + K\sin\theta_n \end{cases}$$

ただし　$\theta_n = \theta(t = n-0)$，$p_n = p(t = n-0)$

$$\mathrm{QSM}: |\psi_{n+1}> = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}K\cos\theta}|\psi_n>$$

ただし，$|\psi_n> = |\psi(t = n-0)>$。

$K < K_c$（$\simeq 0.98$）の場合のCSMの位相空間はKAM Torusで仕切られており可積分的である。それに対し，$K > K_c$ の場合のそれは大域的 Chaos で満たされており非可積分的である。特にこの大域的 Chaos は運動量空間での拡散を生じる：

$$<(p_n - p_0)^2>_{\theta_0} = D(K) - n \;, \quad (\mathrm{CSM}) \;。$$

量子古典対応を探るためにQSMの位相空間の分布関数をCSMのそれと比べてみる。また，その時間以後では量子論での干渉のために２つの分布関数の少なくとも細部は一致しなくなるという量子古典対応の限界時間 n^* の Plank 定数 $\hbar$ 依存性を調べてみる。すると…

ⅰ）可積分的な場合（$K < K_c$）

２つの分布関数は，時刻 $n\to\infty$ においてでさえ，KAM Torus の特定の皮の上に局在しているさまが一致している。また n^* は $n^* \propto \hbar^{-\frac{1}{2}}$ という依存性を持つ。よって $\hbar\to 0$ の極限ですみやかに $n^*\to\infty$ となる。結論として量子古典対応は良く成立している。

ⅱ）非可積分的な場合（$K > K_c$）

n^* は $n^* \propto \log\frac{1}{\hbar}$ という依存性を持つ。これは $\hbar\to 0$ の極限で非常にゆっくりにしか $n^*\to\infty$ とならないことを意味する。さらにこの時刻以後２つの分布関数は大域的に異ったものとなる。CSMの分布関数は運動量空間をどこまでも拡散していくのに対して，QSMのそれは拡散を停止する。よって

$$<(p_n - p_0)^2> = \begin{cases} D(K)\cdot n\;, & (n \le n^*) \\ D(K)\cdot n^*, & (n > n^*) \end{cases}\;, \quad (\mathrm{QSM})$$

を得る。これが干渉による量子 Chaos の≪自己劣化≫──非可積分系での量子古典対応の破れ──である。

ここで，この非可積分系での量子古典対応の破れは，系が非可積分であるが故の位相空間で

引きのばされたり折りたたまれた多様体の隣接した branch の上の波束がまったく異なる位相を持つということと，量子論での干渉に起因している。よって，量子古典対応の破れは非可積分系一般で起こることが期待される。$n^* \propto \log\frac{1}{\hbar}$ という依存性についても同様である。

さらに，macro な非可積分系での量子古典対応の限界時間 n^* を評価してみよう。$\hbar \sim 10^{-27}$〔erg. sec〕として特徴的な物理量の大きさを CGS 単位程度とすると，$n^* \sim 10^2$〔sec〕を得る。

さて，現実の系は全て量子系であるからナイーブに上の評価を適用すると，10^2〔sec〕程度より長く Chaos 的挙動を示す macro な古典非可積分系は存在しないという結論を得る。これは，古典統計力学が成立している系が多々存在するという我々の知識と相いれない。よって，非可積分系での量子古典対応を回復する機構が存在しているに違いないと結論される。

我々はこの機構を現実の系の高次元性に求めた。macro な自由度では他の micro な自由度からたえず擾乱を受けている。それが量子 Chaos の≪自己劣化≫を更新しているのではないだろうか？

具体的な計算機実験としては，他の micro な自由度からの擾乱を“Unitary な Noise”で模倣して QSM に加えてみる。Unitary な Noise としては以下で説明する Time Distance Randomization（TDR）と Von Neumann Randomization（VNR）の２種類を用意した。結果はそれぞれ違った意味であるが確かに量子古典対応が回復する。

(I) Time Distance Randomization（TDR）

これは Standard Map の kick 間の時間間隔に Randomness を入れるという Noise の入れ方である。つまり Hamiltonian を

$$H=\frac{1}{2}p^2+K\cos\theta\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n+\Delta\tau_n)$$

$$\text{ただし，}\langle\Delta\tau_n\rangle=0,\quad \langle\Delta\tau_m\,\Delta\tau_n\rangle=(\Delta\tau)^2\,\delta_{mn}$$

と変更する。Hamiltonian のレベルで Noise を入れているので古典 Noise と量子 Noise の対応は明確である。しかしながら位相空間で一様な Noise ではない。

Noise の大きさ $\Delta\tau$ を変化させて運動量空間での拡散係数 D を古典論・量子論の双方について plot した結果が図１である。古典論の拡散係数 $D_{\rm cl}$ を変化させない程微小な $\Delta\tau$ の範囲で，$\Delta\tau$ の増大とともに量子論の拡散係数 $D_{\rm qm}$ はすみやかに立ち上がり $D_{\rm cl}$ と一致する plateau をなすようになる。

つまり，系の運動量方向の Dynamics に関して，古典論を乱さない微小な Noise が量子論

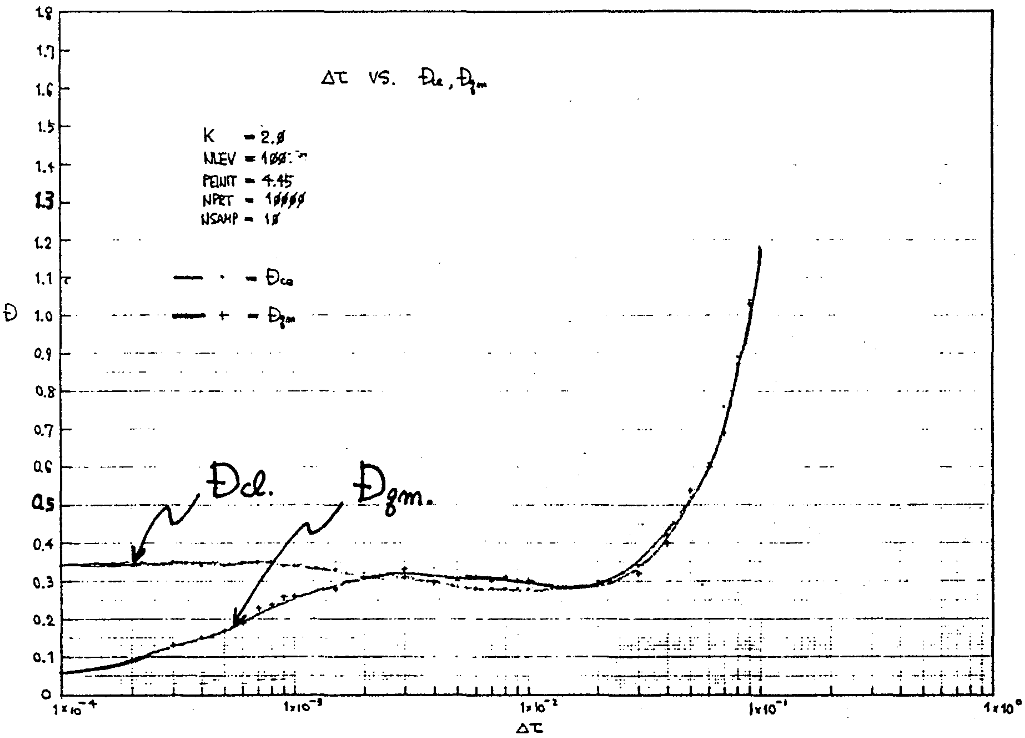

図1　TDRによる拡散の回復：$\varDelta\tau$ vs. D_{cl}，D_{qm}（$K=2.0$,　$\hbar=2\pi/100$）

を古典論に一致させるのである。これがTDRによる非可積分系の量子古典対応の回復である。

付言しておくと，TDRはroughなNoiseの入れ方であるので位相空間のDynamicsに関しては量子古典対応を回復しない。

(II)　Von Neumann Randomization (VNR)

これはTDRよりdelicateなNoiseの入れ方であり，位相空間のDynamicsに関して量子古典対応を回復することを期待されている。von Neumann状態の基底 $\{|\varphi_j>\}_j$ とは位相空間で局在した状態たちによる完全正規直交系である。これを用いて，QSMのDynamicsを位相空間の $\hbar$ 程度のcellごとに位相だけ乱すようにする：

$$|\psi_{n+1}> = \hat{R}_n\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}K\cos\theta}\,|\psi_n>$$

ただし

$$\hat{R}_n = \sum_j |\varphi_j>\, e^{i\theta_{nj}} <\varphi_j|$$

$$<\theta_{nj}> = 0,\quad <\theta_{mj}\,\theta_{nk}> = (\varDelta\theta)^2\,\delta_{mn}\,\delta_{jk}\ 。$$

対応する古典系CSMへのNoiseの入れ方は直接には不明である。そこで，位相空間を局所

的に乱す一番簡単な次の形を選んだ：

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1} + \xi_n \\ p_{n+1} = p_n + K \sin \theta_n + \eta_n \end{cases}$$

ただし $< \xi_n > = < \eta_n > = 0$, $< \xi_m \xi_n > = \xi^2 \delta_{mn}$, $< \eta_m \eta_n > = \eta^2 \delta_{mn}$,

$< \xi_m \eta_n > = 0$ 。

そして，Noise の大きさ $\xi = \eta$ は古典論での拡散が量子論でのそれと一致するように決める。

分布関数の時間発展が図2に示されている。これを見ると，量子系＋Noise ＝古典系＋Noise の意味で位相空間の Dynamics が回復されているのがわかる。

最後に，現在この研究は次のように発展している：ⅰ）Noiseに対する古典性の回復で量子 Chaos を特徴づける試みとして Noise による可逆性の破壊の程度を調べる。ⅱ）Noiseを入れるのではなく自由度を増した自励系でも拡散の回復や位相空間の Dynamics が回復するかどうかを調べる。

参　考　文　献

1) B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, D. L. Shepelyansky: Sov. Sci. Rev. Sect. **C2** (1981) 209.
2) M. Toda and K. Ikeda: to be published.
3) G. Casati, B. V. Chirikov, I. Guarneri and D. L. Shepelyansky: Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2437.
4) G. Casati, B. V. Chirikov, J. Ford and F. M. Izrailev: in *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems,* ed. by G. Casati and J. Ford, Lecture Notes in Physics Vol. 93 (Springer-Verlag, Berlin, 1979) p. 334.
5) B. V. Chirikov: Phys. Rep. **52** (1979) 265.
6) S. Fishman, D. R. Grempel and R. E. Prange: Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 509, and Phys. Rev. **A29** (1984) 1639.
7) D. J. Thouless: Phys. Rev. Lett. **39** (1977) 1167.
8) D. L. Shepelyansky: Physica (Utrecht) **8D** (1983) 208.
E. Ott, T. M. Antonsen, Jr. and J. D. Hanson: Phys. Rev. Lett. **63** (1984) 2187.
9) K. Ikeda, S. Adachi and M. Toda: to be published.

10) J. von Neumann: *Die Mathematische Grundlagen der Quantum-mekanik* (Springer-Verlag, Berlin, 1932).

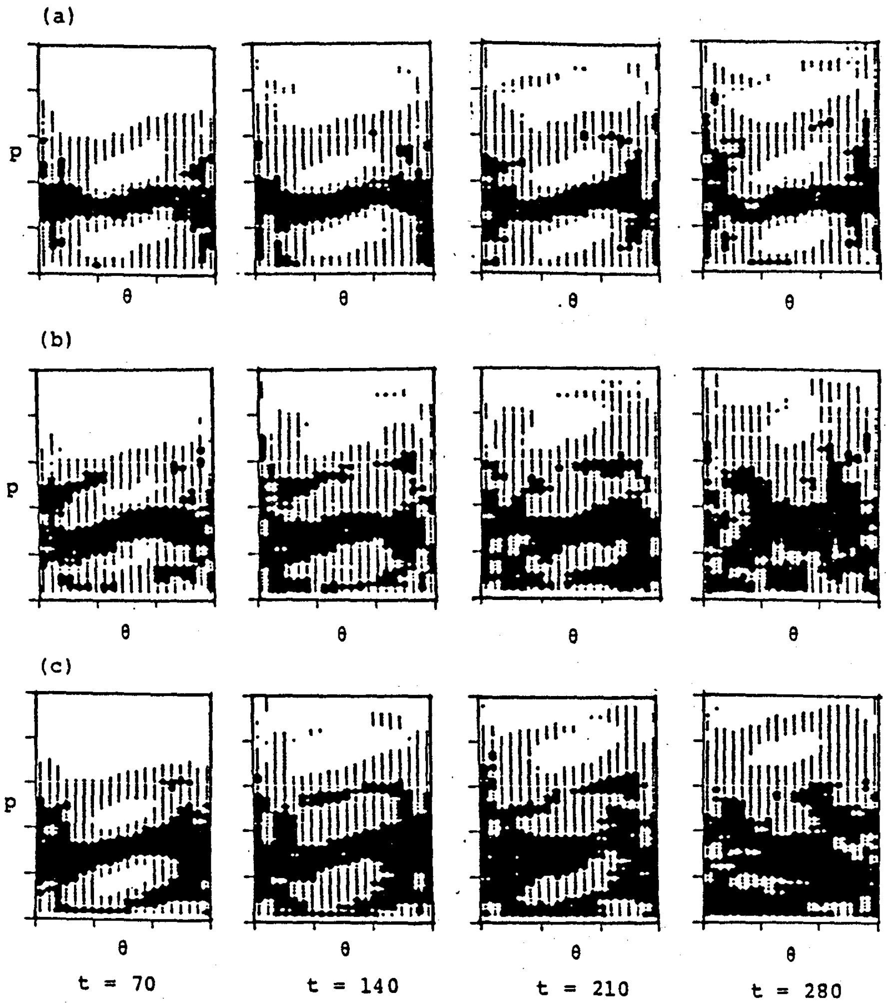

図２　位相空間の分布関数の時間発展
（$K=2.0$,　$\hbar=2\pi/400$）
a）量子論
b）量子論＋von Neumann　Randomization
c）古典論＋Noise